Exercise 1

Translate, as precisely as possible, the following sentences into propositional logic. Indicate to which sentence corresponds each propositional variable.

(1)
a. The engine is not noisy, but it uses lots of gas.
b. It is not the case that Max comes if Pam or Sam comes.
c. John is not only stupid, he is also mean.
d. I go to the beach or to the movies by foot or by car.
e. John will come only if Paul doesn't come.

. . . . Answer . . . .

$(\neg P \wedge Q)$
$\neg((Q \vee R) \to P)$
$(P \wedge Q)$
$(P \vee (Q \vee (R \vee S)))$ var : $((P \vee Q) \wedge (R \vee\!\!\!\vee S))$
with : P = « I go to the beach on foot » ;
Q = « I go to the beach by car » ;
R = « I go to the movies on foot » ;
S = « I go to the movies by car »

$(P \to \neg Q)$

Exercise 2

Show that for any φ, ψ and χ, the following pairs of formulae are logically equivalent :

(1)	$\neg\neg\varphi$	φ	
(2)	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	
(2')	$\varphi \to \psi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	
(3)	$\varphi \to \psi$	$\neg\psi \to \neg\varphi$	contraposition
(4)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	
(5)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	
(6)	$\varphi \vee \varphi$	φ	idempotence
(7)	$\varphi \wedge \varphi$	φ	"
(8)	$\varphi \vee \psi$	$\psi \vee \varphi$	commutativity
(9)	$\varphi \wedge \psi$	$\psi \wedge \varphi$	"
(10)	$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi$	associativity
(11)	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	"
(12)	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributivity
(13)	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	"
(14)	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	de Morgan's law
(15)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	"

. . . . Answer . . . .

To prove that two formulae are logically equivalent, it suffices to show that they have the same column in a (complete) truth table.
For example (number 2) :

φ	ψ	$(\varphi \to \psi)$	$\neg\varphi$	$(\neg\varphi \vee \psi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Exercise 3

Among the following discourses, which ones correspond to valid deductions ?

(2) a. If Peter lied, then John is guilty. Yet John is guilty. Therefore Peter didn't lie.
b. If Peter lied, then John is guilty. But Peter didn't lie. Therefore John isn't guilty.
c. If Horacio loves Juliette, she will marry him. If Horacio doesn't love Juliette, she'll marry Gandalf. Yet Juliette will not marry Horacio, therefore she will marry Gandalf.
d. If Horacio loves Juliette, she will marry him. If Horacio doesn't love Juliette, she'll marry Gandalf. Yet Juliette will marry Gandalf, therefore she won't marry Horacio.

. . . . Answer . . . .

None of those discourses correspond to valid deduction.

Exercise 4

Parmi les discours suivants, lesquels sont des raisonnements corrects ?

(3) a. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean n'est pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti.
b. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Pierre n'a pas menti. Donc Jean n'est pas coupable.
c. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.
d. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette n'épousera pas Horace, donc elle épousera Gandalf.
e. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette épousera Gandalf, donc elle n'épousera pas Horace.

. . . . Answer . . . .

(4) a. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean n'est pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti.

Choisissons P pour représenter la proposition *Pierre a menti* et J pour *Jean est coupable*. La première prémisse est $(P \to J)$; la seconde est $\neg J$; leur conjonction est $((P \to J) \wedge \neg J)$. Dans une table de vérité comprenant une colonne pour la conjonction des prémisses et une colonne pour la conclusion, on peut voir que *dans toutes les situations où la conjonction des prémisses est vraie, la conclusion l'est aussi*. Le discours est donc valide.

Le type d'inférence illustré par ce discours est appelé *modus tollendo tollens*, ou plus simplement *modus tollens*.

b. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Pierre n'a pas menti. Donc Jean n'est pas coupable.

Reprenons les mêmes lettres de proposition qu'à la question (4-a). La première prémisse est $(P \to J)$; la seconde est $\neg P$; leur conjonction est $((P \to J) \wedge \neg P)$. Dans la table de vérité, on trouve une ligne où la conjonction des prémisses est vraie et la conclusion fausse. Le discours n'est donc pas valide.

Ce type de raisonnement fallacieux est assez répandu dans la vie quotidienne. On peut considérer qu'il s'agit d'une faute logique, mais on peut aussi considérer que l'erreur vient d'une mauvaise interprétation de *si* : il arrive fréquemment qu'en entendant *B si A* on comprenne *B si et seulement si A*, et cette “interprétation renforcée” est considérée par certains linguistes comme une *implicature* : une inférence qui n'est pas nécessairement logiquement valide, mais que l'on fait dans certains contextes, sur la base de principes généraux de communication.

c. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.

Attribuons les lettres suivantes à chaque proposition simple :

—P : *Pierre se présente*

—J : *Jean démisionne*

—A : *Albert se présente*

—E : *Albert est élu*

—R : *Pierre est élu*

Les prémisses sont :

—$(P \to J)$

—$(J \to A)$

—$(A \to E)$

—$(E \to \neg R)$

—$(\neg P \to \neg R)$

Il faut donc déterminer si on a une relation de conséquence logique entre la conjonction de ces prémisses et la conclusion $(\neg R)$. Cela peut se faire en calculant la table de vérité, ce qui est possible mais fastidieux, puisqu'elle contient $2^5 = 32$ lignes. On peut aussi exploiter une propriété facile à démontrer dans le cas général : $(A \to B) \wedge (B \to C)$ a pour conséquence logique $A \to C$. Si on applique cette propriété aux prémisses en présence, on peut conclure que quand les prémisses sont vraies, alors la conjonction $(P \to \neg R) \wedge (\neg P \to \neg R)$ est vraie. Or on peut facilement établir avec une table de vérité à 4 lignes que si cette dernière conjonction est vraie, alors $\neg R$

est vraie. $\neg R$ est donc une conséquence logique de cette dernière conjonction, qui est elle-même une conséquence logique de la conjonction initiale : le syllogisme est valide.

d. Si Horace aime Juliette (H), elle l'épousera (J). Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf (G). Or Juliette n'épousera pas Horace, donc elle épousera Gandalf.
La conjonction des prémisses est $(H \to J) \wedge (\neg H \to G) \wedge \neg J$ et la conclusion G. L'inférence est valide. En effet, dans l'unique situation où la conjonction des prémisses est vraie, la conclusion l'est aussi (cette situation est celle où $H = 0$, $J = 0$ et $G = 1$).

e. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette épousera Gandalf, donc elle n'épousera pas Horace.
Reprenons les mêmes lettres de proposition qu'à la question précédente. La conjonction des prémisses est $(H \to J) \wedge (\neg H \to G) \wedge G$ et la conclusion $\neg J$. La table de vérité complète est la suivante :

H	J	G	$H \to J$	$\neg H \to G$	$\neg J$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Dans cette table, il y a trois situations où les trois prémisses sont vraies (en vert), et on observe que dans deux d'entre elles, la conclusion n'est pas vraie. On peut donc en conclure que le syllogisme n'est pas valide.