

Incompatibilité et sous-contrariété Commençons par définir deux relations possibles entre phrases ou entre formules (disons propositions pour la suite) :

- On dira que deux propositions sont **incompatibles** si elles ne peuvent pas être vraies en même temps. C'est une notion relativement intuitive, que l'on peut facilement vérifier sur les exemples suivants :

- (1) a. Ayo est au Japon.
b. Ayo est à Paris.
- (2) a. Tous les enfants dorment.
b. Aucun enfant ne dort.
- (3) a. Tous les enfants dorment.
b. Il y a (au moins) un enfant qui ne dort pas.
- (4) a. Lila est en retard et Kim en avance.
b. Lila et Kim sont en avance.
- (5) a. Joan a obtenu son bac.
b. Joan n'a pas obtenu son bac.

- On peut aussi s'intéresser aux propositions qui ne peuvent pas être fausses en même temps. Dans la suite, on dira que de telles propositions sont **sub-compatibles** (c'est un mot que je viens d'inventer).

Cette notion est moins intuitive que la précédente. Par exemple, il est difficile de décider directement si les phrases (1) sont subcompatibles. On va plutôt considérer les propositions qui seraient vraies lorsque ces phrases sont fausses : ainsi, si (1-a) est fausse, c'est que "Ayo n'est pas au Japon" ; et si (1-b) est fausse, c'est que "Ayo n'est pas à Paris". Or ces deux dernières propositions peuvent être vraies en même temps (si Ayo est en Australie par exemple), donc les phrases (1) peuvent être fausses en même temps, elles ne sont donc pas subcompatibles.

Voici quelques exemples de paires de phrases subcompatibles :

- (6) a. Il y a (au moins) un enfant qui dort.
b. Il y a (au moins) un enfant qui ne dort pas.
- (7) a. Lila ou Kim est absente.
b. Lila ou Kim est présente.
- (8) a. Tous les enfants dorment. =(3)
b. Il y a (au moins) un enfant qui ne dort pas.
- (9) a. Joan a obtenu son bac. =(5)
b. Joan n'a pas obtenu son bac.

Les deux relations que nous venons de définir sont indépendantes : deux propositions données peuvent être à la fois incompatibles et subcompatibles (par exemple les paires (3) et (5)), ou incompatibles mais pas subcompatibles (par exemple (1)), subcompatibles mais pas incompatibles (par exemple (7)), ou enfin, bien sûr, ni l'un ni l'autre.

À partir de ces deux notions, on peut proposer les définitions suivantes :

- Deux propositions sont **contradictoire**s si et seulement si elles sont incompatibles et subcompatibles.

Autrement dit, deux propositions contradictoires ne peuvent pas être vraies en même temps, ni fausses en même temps.

- Deux propositions sont **contraire**s si et seulement si elles sont incompatibles mais pas subcompatibles.

Autrement dit, deux propositions contraires ne peuvent pas être vraies en même temps, mais peuvent être fausses en même temps.

Remarque : Le fait que deux propositions soient incompatibles ne suffit pas à décider si elles sont contraires ou contradictoires : il faut regarder ce qui se passe quand les propositions sont fausses pour prendre une décision.