A crash course in First Order Logic

Pascal Amsili

Université Sorbonne Nouvelle
Lattice (UMR 8094 - CNRS - ENS/PSL - Paris 3)

Cogmaster, November 2022

Propositional Logic

Well-formed formulae

Let L_p be the language of propositional logic. The vocabulary of L_p comprises (i) a set of *proposition symbols* P, Q, R..., (ii) a unary connective $\neg$, (iii) binary connectives $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, and (iv) parenthesis (&).
The **well formed formulae** (wffs) of L_p are given by:

(i). All proposition symbols are wffs.

(ii). If φ is a wff of L_p, then $\neg\varphi$ is also a wff of L_p.

(iii). If φ and ψ are wffs of L_p, then so are $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, and $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(iv). Nothing else is a wff
(Nothing that cannot be constructed by successive steps of (i), (ii) or (iii) is a wff).

Well-formed formulae

$$
\begin{array}{lcl}
\text{WF} & \rightarrow & \text{P} \mid \text{Q} \mid \text{R} \\
\text{WF} & \rightarrow & (\ \text{WF BOP WF}\ ) \\
\text{WF} & \rightarrow & \neg\ \text{WF} \\
\text{BOP} & \rightarrow & \wedge \mid \vee \mid \rightarrow
\end{array}
$$

Sorbonne Nouvelle

Syntactic tree

- $((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg\neg\neg Q) \leftrightarrow R)$ (iii, $\leftrightarrow$)
  - $(\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg\neg\neg Q)$ (iii, $\rightarrow$)
    - $\neg(P \vee Q)$ (ii)
      - $(P \vee Q)$ (iii, $\vee$)
        - P (i)
        - Q (i)
    - $\neg\neg\neg Q$ (ii)
      - $\neg\neg Q$ (ii)
        - $\neg Q$ (ii)
          - Q (i)
  - R (i)

Valuation

Let V be a *truth assignment* (or *valuation*) that maps all proposition symbols to a truth value (it can also be seen as a *model*). Then predicate calculus can be defined inductively as follows:

(i). If φ is a proposition symbol, then $[\![\varphi]\!]_V = V(\varphi)$;
(ii). If φ is a wff, then $[\![\neg\varphi]\!] = 1$ if and only if $[\![\varphi]\!] = 0$;
(iii). If φ and ψ are wffs, then

- $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = 1$ iff $[\![\varphi]\!] = 1$ and $[\![\psi]\!] = 1$;
- $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = 0$ iff $[\![\varphi]\!] = 0$ and $[\![\psi]\!] = 0$;
- $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!] = 0$ iff $[\![\varphi]\!] = 1$ and $[\![\psi]\!] = 0$;
- $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!] = 1$ iff $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$;

Sorbonne Nouvelle

Truth tables

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Composite truth table

$((p$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$r))$	$\vee$	$(r$	$\rightarrow$	$p))$
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Predicate Logic

Predicates I

1. **Phrases catégoriques** sujet + prédicat

(1) a. Platon est un homme $H(p)$
b. Le train siffle $S(t)$
c. Cette bouilloire fuit $F(b)$

Predicate: **function** from entities to truth values

2. **Généralisation** prédicats à n places...

(2) a. Jean est plus grand que Paul $G(j,p)$
b. Pierre plume le poulet $P(p,l)$

... avec $n = 0$, ou 3, 4, etc.

(3) a. Il pleut
b. Pierre a présenté Léa à Marcel
c. Paul a vendu sa montre à Nicolas pour 50 000 £

Predicates II

3. Légende on introduit des **variables**, ce qui est important pour distinguer les *places* :

(4) a. Pierre aime Marie : $A(p, m)$
b. Marie aime Pierre : $A(m, p)$
c. aime$(x, y) \approx x$ aime y

Notations: $H(x)$ ou Hx, voire $(H)x$; $A(x, y)$ ou Axy, ou xAy, voire $((A)x)y$. Aussi: $\mathrm{homme(x)}$

Predicates III

Qu'est-ce qu'on gagne ?

Jean est écrivain	$E(j)$	P
Jean est célèbre	$C(j)$	Q
Jean est un écrivain célèbre	$E(j) \wedge C(j)$	$P \wedge Q$

$$\frac{E(j) \quad C(j)}{E(j) \wedge C(j)} \qquad \frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$$

Presque rien si on n'ajoute pas la quantification !

Quantifiers I

(5) a. Pierre est gentil $G(p)$
b. Tous sont gentils $G(t)$ ⁇

universal quantifier $\forall$

(6) a. $\forall x\ G(x)$
b. For all possible values of the variable x, the formula $G(x)$ is satisfied (true).

Forme générale : $\forall x\ \varphi$, où φ est une formule bien formée.

(7) a. $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x, j))$
b. $\forall y \forall y \forall z\ (Axy \wedge Ayz \wedge Azx)$
c. $\forall x\ \neg(A(x) \rightarrow \forall z\ P(x, z))$

Rq: no existence/plurality presupposition

Quantifiers II

(8) a. Toutes les billes de ce sachet sont en verre
b. Tout homme est mortel
c. Chacun devine quel est son destin
d. Les enfants sont endormis
e. Qui veut voyager loin ménage sa monture
f. L'homme est un animal métaphysique, autrement dit, un petit compliqué
g. Un ministre, ça ferme sa gueule ou ça démissionne

Universel négatif:

(9) Rien ne dure toujours $\forall x \, \neg T(x)$

Quantifiers III

existential quantifier $\exists$

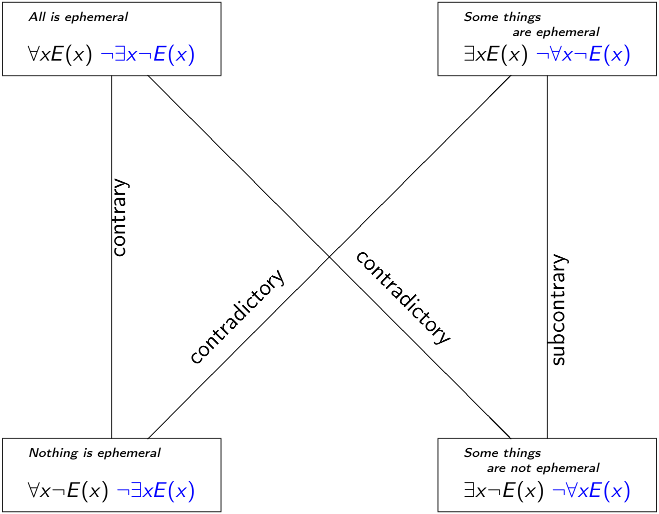
(10) a. $\exists x \ G(x)$
b. Il y a (au moins) une valeur de x qui satisfait la formule $G(x)$

(11) a. Un aérolithe est tombé dans mon jardin
b. Certains profs sont gentils
c. Il y a des nouilles au dessert
d. Quelques uns des mes amis ne boivent pas d'alcool
e. Il a du faire quelque mauvaise rencontre

Existentiel négatif :

(12) a. Il n'y a pas d'amour heureux
b. $\neg\exists x \ (Ax \wedge Hx)$

Opposition square



Discourse universe *vs.* restriction I

La quantification logique est **non restreinte**:

(13) a. $\forall x \; B(x)$
b. $\approx$ Tout est bleu (y compris $\sqrt{2}$)

La quantification linguistique est (presque toujours) **restreinte**:

(14) a. Tous ont été accueillants
b. Certains philosophes roulent en Ferrari

Discourse universe *vs.* restriction II

- **Domaine de quantification** (= univers de discours) : ensemble des entités pertinentes, fournies par le *contexte*, le plus souvent implicite, mais dans certains cas marqués par un circonstant.

(15) a. (i) ~~[Dans cette maison]~~ Tous les enfants sont endormis
(ii) Parmi mes amis, il n'y a pas de fumeur de pipe

- **Restriction** : sous-domaine de l'univers de discours, explicitement introduit par les quantificateurs de la langue naturelle, et tel que ne sont pertinentes pour la quantification que les entités appartenant à ce sous-domaine.

Discourse universe *vs.* restriction III

Mise en œuvre de la quantification "naturelle" (restreinte) dans un système qui ne définit que la quantification restreinte:

(16) a. Tous les philosophes sont assis : $\forall x(P(x) \rightarrow A(x))$
b. Quelques philosophes sont assis : $\exists x(P(x) \wedge A(x))$

Discussion:

- $\exists x\ (Ax \wedge Bx)$ $\cancel{\forall x\ (Ax \wedge Bx)}$
  $\cancel{\exists x\ (Ax \rightarrow Bx)}$ $\forall x\ (Ax \rightarrow Bx)$
- interdéfinissabilité: $A \rightarrow B$ est équivalent à $\neg(A \wedge \neg B)$

$\rightarrow$ New version of the opposition square

Syntax I

Definition 1

(i) If A is a predicate constant, of arity n, and each $t_1 ... t_n$ an individual constant or variable, then $A(t_1, ..., t_n)$ is a wff.

(ii) If φ is a wff, then so is $\neg\varphi$.

(iii) If φ and ψ are wffs, then so are $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, and $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(iv) If φ is a wff and x a variable, then $\forall x\varphi$ and $\exists x\varphi$ are wffs.

(v) Nothing else is a wff.

Syntax II

Definition 2

If $\forall x \psi$ is a sub-formula of φ, then ψ is called the **scope** of this occurrence of the quantifier $\forall x$ in φ. Same definition for $\exists x$.

Definition 3

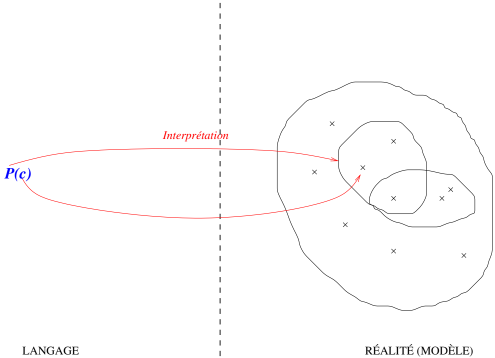
(a) An occurrence of a variable x in the formula ϕ (which is not part of a quantifer) is called **free** if this occurrence of x is not in the scope of a quantifier $\forall x$ ou $\exists x$ occurring in ϕ.

(b) If $\forall x \psi$ (or $\exists x \psi$) is a sub-formula of ϕ and x is free in ψ, then this occurrence of x is called **bound** by the quantifier $\forall x$ (or $\exists x$).

Definition 4

A **sentence** is a formula with no free variable.

Extentional first order model



Rappel syntaxe

(i)	Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L, alors : $A(t_1, \ldots t_n)$ est une wff
(ii)	Si φ est une formule dans L, alors : $\neg\varphi$ est une wff
(iii)	Si φ et ψ sont des formules dans L, alors: $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des wff
(iv)	Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x \varphi$ et $\exists x \varphi$ sont des wff
(v)	Rien d'autre n'est une formule

Sémantique hors quantificateurs

(i) Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ~~ou une variable~~ du vocabulaire de L, alors :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(A(t_1, \ldots t_n)) = 1$$

ssi

$$\langle I(t_1), \ldots I(t_n) \rangle \in I(A)$$

(ii) Si φ est une formule dans L, alors :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$$

ssi

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$$

(iii) Si φ et ψ sont des formules dans L, alors:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1$$

ssi

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ et } \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 0$$

ssi

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0 \text{ et } \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$$

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \rightarrow \psi)) = 0$$

ssi

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ et } \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$$

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$$

ssi

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi)$$

(iv) Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules de L.

Recursive calculus by substitution

(i)	Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ~~ou une variable~~ du vocabulaire de L, alors : $$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(A(t_1, \dots t_n)) = 1$$ ssi $$\langle I(t_1), \dots I(t_n) \rangle \in I(A)$$
(ii)	Si φ est une formule dans L, alors : $$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$$ ssi $$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$$
(iii)	Si φ et ψ sont des formules dans L, alors:
	$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$ — $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 0$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$
	$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \rightarrow \psi)) = 0$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$ — $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi)$
(iv)	Si φ est une formule et x une variable, alors:
	$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\forall x \varphi) = 1$ ssi pour toute constante c de L $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi_{[c/x]}) = 1$ — $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\exists x \varphi) = 1$ ssi il existe une constante c de L $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi_{[c/x]}) = 1$

Sorbonne Nouvelle

Recursive calculus with assignment

(0)	$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ ssi il existe une affectation g tel que $V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$
(i)	Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L, alors : $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(A(t_1, \ldots t_n)) = 1$ ssi $\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},g}, ... [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},g} \rangle \in I(A)$
(ii)	Si φ est une formule dans L, alors : $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\neg\varphi) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 0$
(iii)	Si φ et ψ sont des formules dans L, alors: $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}((\varphi \wedge \psi)) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\psi) = 1$ $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}((\varphi \vee \psi)) = 0$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 0$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\psi) = 0$
	$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}((\varphi \to \psi)) = 0$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\psi) = 0$ $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = \mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\psi)$
(iv)	Si φ est une formule et x une variable, alors: $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\forall x\varphi) = 1$ ssi pour tout $d \in D$ $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1$ $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe un $d \in D$ tel que $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1$

Tarskian truth definition

Let $[\![\alpha]\!]^g_{\mathcal{M}}$ be the denotation of α in the model $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ and with the assignment g.

$[\![t]\!]^g_{\mathcal{M}} = I(t)$ if t is an individual constant
$[\![t]\!]^g_{\mathcal{M}} = g(t)$ if t is a variable

$$[\![P(t_1, ...t_n)]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1 \text{ iff } \langle [\![t_1]\!]^g_{\mathcal{M}}, ...[\![t_n]\!]^g_{\mathcal{M}} \rangle \in I(P).$$

If φ and ψ are wfss,

$[\![\neg\varphi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$	iff	$[\![\varphi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 0$	
$[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$	iff	$[\![\varphi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$	and $[\![\psi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$
$[\![(\varphi \vee \psi)]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$	iff	$[\![\varphi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$	or $[\![\psi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$
$[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$	iff	$[\![\varphi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 0$	or $[\![\psi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1$

$$\boxed{[\![\exists y\ \varphi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1 \text{ iff there is a } d \in D \text{ s.t. } [\![\varphi]\!]^{g[y/d]}_{\mathcal{M}} = 1}$$

similarly,

$$\boxed{[\![\forall y\ \varphi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1 \text{ iff for all } d \in D,\ [\![\varphi]\!]^{g[y/d]}_{\mathcal{M}} = 1}$$

Il φ is a sentence:

$$\underline{[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = 1 \text{ iff there is an assignment } g \text{ such that } [\![\varphi]\!]^g_{\mathcal{M}} = 1}$$

Equivalences I

- Bound variables are "dummy": their name no longer matters.

$$\forall x\, Fx \quad \equiv \quad \forall y\, Fy$$

But beware of unintended captures:

$$\forall x\, (Fx \land Gy) \quad \not\equiv \quad \forall y\, (Fy \land Gy)$$

- Duality rules (*de Morgan* laws)

$$\begin{array}{rcl}
\forall x\, \alpha & \equiv & \neg\exists x\, \neg\alpha \\
 & \textit{for instance:} & \\
\forall x\, Rx & \equiv & \neg\exists x\, \neg Rx \\
\textit{All is relative} & \approx & \textit{Nothing is absolute } (\approx \textit{ non relative}) \\
\forall x\, (Px \to Kx) & \equiv & \neg\exists x\, (Px \land \neg Kx) \\
\textit{All professors are kind} & \approx & \textit{There are no non-kind professors} \\
 & \textit{Other variants:} & \\
\exists x\, \alpha & \equiv & \neg\forall x\, \neg\alpha \\
\neg\exists x\, \alpha & \equiv & \forall x\, \neg\alpha \\
\neg\forall x\, \alpha & \equiv & \exists x\, \neg\alpha
\end{array}$$

Equivalences II

- Distribution rules:

$$\begin{array}{rcl}
\forall x\,(\alpha \wedge \beta) & \equiv & (\forall x\,\alpha \wedge \forall x\,\beta) \\
\textit{All is rare and expensive} & \approx & \textit{All is rare and all is expensive} \\
 & \textbf{\textit{But:}} & \\
\forall x\,(\alpha \vee \beta) & \not\equiv & (\forall x\,\alpha \vee \forall x\,\beta) \\
\textit{All is either relative or absolute} & \not\approx & \textit{Either all is relative or all is absolute}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\exists x\,(\alpha \vee \beta) & \equiv & (\exists x\,\alpha \vee \exists x\,\beta) \\
 & \textbf{\textit{But:}} & \\
\exists x\,(\alpha \wedge \beta) & \not\equiv & (\exists x\,\alpha \wedge \exists x\,\beta)
\end{array}$$

$$\boxed{\exists x\,(\alpha \rightarrow \beta) \quad \equiv \quad (\forall x\,\alpha \rightarrow \exists x\,\beta)}$$

Equivalences III

- Conditional distribution ($\bar{\beta}$ doesn't contain free occurrences of x)

$$
\begin{array}{rcl}
\bar{\beta} & \equiv & \forall x \bar{\beta} \\
\bar{\beta} & \equiv & \exists x \bar{\beta} \\
 & & \\
\forall x\ (\alpha \vee \bar{\beta}) & \equiv & (\forall x\ \alpha \vee \bar{\beta}) \\
\exists x\ (\alpha \wedge \bar{\beta}) & \equiv & \exists x\ \alpha \wedge \bar{\beta} \\
\forall x\ (\alpha \rightarrow \bar{\beta}) & \equiv & \exists x\ \alpha \rightarrow \bar{\beta} \\
\textit{Every entity is such that if it breaks, there is noise} & \approx & \textit{If some entity breaks, there is noise} \\
\forall x\ (\bar{\beta} \rightarrow \alpha) & \equiv & \bar{\beta} \rightarrow \forall x\ \alpha \\
\textit{For all person, if there is noise, s/he is upset} & \approx & \textit{If there is noise, everyone is upset}
\end{array}
$$

Donkey sentences

(17) a. Every farmer who owns a donkey is rich.
b. Every farmer who owns a donkey beats it.