

Exercice 1

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de  $L_p$  ?

- |   |   |                                 |
|---|---|---------------------------------|
| (1) $\neg(\neg P \vee Q)$                                       | (5) $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$               | (9) $(P \vee (Q \vee R))$       |
| (2) $P \vee (Q)$  | (6) $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | (10) $\neg P \vee Q \vee R$     |
| (3) $\neg(Q)$   | (7) $((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$        | (11) $(\neg P \vee \neg\neg P)$ |
| (4) $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | (8) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$   | (12) $(P \vee P)$               |

..... Corrigé .....

- |   |     |   |     |                                 |     |
|---|-----|---|-----|---------------------------------|-----|
| (1) $\neg(\neg P \vee Q)$                                       | OUI | (5) $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$               | NON | (9) $(P \vee (Q \vee R))$       | OUI |
| (2) $P \vee (Q)$  | NON | (6) $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | OUI | (10) $\neg P \vee Q \vee R$     | NON |
| (3) $\neg(Q)$   | NON | (7) $((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$        | OUI | (11) $(\neg P \vee \neg\neg P)$ | OUI |
| (4) $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | OUI | (8) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$   | NON | (12) $(P \vee P)$               | OUI |

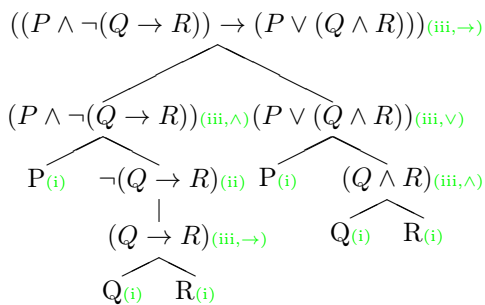
N.B. : Il arrive que l'on s'abstienne de noter la paire de parenthèses la plus externe mais en toute rigueur, on doit trouver exactement autant de paires de parenthèses qu'il y a de connecteurs binaires.

De même, pour les connecteurs associatifs (comme  $\wedge$  et  $\vee$ ), il arrive qu'on néglige d'autres parenthèses lorsque la position des parenthèses absentes n'a pas d'incidence sur la valeur de la formule. Par exemple on écrira  $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$ , car les deux paires parenthèses manquantes peuvent être placées de n'importe quelle manière syntaxiquement correcte sans conséquence.

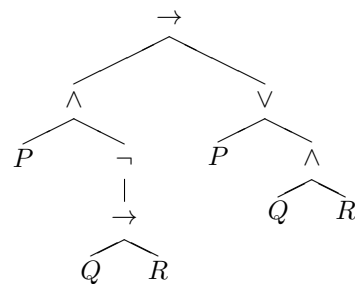
Exercice 2

Montrez que la formule suivante est une formule bien formée du calcul propositionnel en donnant son arbre de décomposition :  $((P \wedge \neg(Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \vee (Q \wedge R)))$ .

..... Corrigé .....



version plus légère :



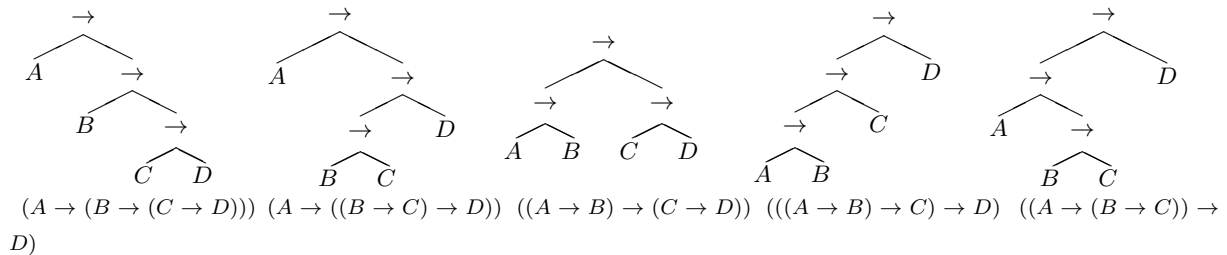


## Exercice 5

Soit l'expression  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ . Quelles sont les formules bien formées que l'on peut obtenir en plaçant des couples de parenthèses ? Donnez l'arbre de décomposition de deux des formules obtenues.

..... Corrigé .....

Si on prend comme signe principal la première flèche, on a deux possibilités. Si on prend la seconde flèche, il n'y a qu'une possibilité, si on prend la troisième, on a deux possibilités (symétriques). Cela donne, avec une notation simplifiée des arbres syntaxiques :



## Exercice 6

Traduire, le plus simplement possible, en langue naturelle les formules suivantes, sachant que  
 $p$  = Jean est heureux  
 $q$  = Jean chantonne  
 $r$  = Jean énerve sa voisine

- (1) a.  $q \rightarrow p$   
 b.  $q \rightarrow r$   
 c.  $\neg p \rightarrow q \rightarrow r$

..... Corrigé .....

- a. Quand il chantonne, Jean est heureux.  
 b. Quand Jean chantonne, il énerve sa voisine.  
 c. La formule  $\neg p \rightarrow q \rightarrow r$  est ambiguë. Il faut donc commencer par la désambiguïser. Il y a cinq possibilités :

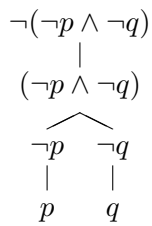
1.  $(\neg p \rightarrow (q \rightarrow r))$  : Quand Jean n'est pas heureux, s'il chantonne, il énerve sa voisine.
2.  $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r)$  : Si Jean chantonne quand il n'est pas heureux, il énerve sa voisine.
3.  $(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r)$  : S'il n'est pas vrai que Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
4.  $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow r)$  : Il n'est pas vrai que si Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
5.  $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r))$  : Il n'est pas vrai que si Jean est heureux, il énerve sa voisine lorsqu'il chantonne.

## Exercice 7

Considérer la formule (2). Représenter son arbre de décomposition. Au vu de cet arbre, quels sont les différents ordres possibles de calcul des colonnes de la table composite ?

$$(2) \quad \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

..... Corrigé .....



Beaucoup d'ordres possibles pour les 4 colonnes  $p$ ,  $q$ ,  $\neg p$ ,  $\neg q$ , avec la seule contrainte que  $p$  soit déterminé avant  $\neg p$ , et  $q$  avant  $\neg q$ . Pour les reste, la dernière colonne calculée est la racine de l'arbre.

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1