L6FL001 Sémantique formelle – 21/22	
Corrigé	
DST n°1 – Groupe 3	9 Mars 2022

Exercice 1

Traduire les phrases suivantes en logique des propositions, en indiquant à quelle proposition correspond chaque symbole de proposition.

(1) a. Soit il pleut, soit il ne pleut pas.
b. Lucie connaît bien Paul et Max, mais elle ne les apprécie pas tous les deux.
c. Il ne suffit pas de mélanger les ingrédients pour réussir la recette.

Correction :

(2) a. Soit il pleut, soit il ne pleut pas.

Il pleut	P

$(P \lor \neg P)$

b. Lucie connaît bien Paul et Max, mais elle ne les apprécie pas tous les deux.

Lucie connaît bien Paul	P
Lucie connait bien Max	M
Lucie apprécie Paul	A_P
Lucie apprécie Max	A_M

$((P \land M) \land (\neg A_P \land \neg A_M))$

c. Il ne suffit pas de mélanger les ingrédients pour réussir la recette.

On mélange les ingrédients	M
On réussit la recette	R

$\neg(M \to R)$

Exercice 2

1. Traduire la phrase suivante en logique des propositions.
2. Donner ses conditions de vérité quand on est dans le cas où : (a) Il est possible de décaler le service, (b) il est tard, et (c) Les invités ne sont pas en retard.
3. Décrivez une situation dans laquelle cette phrase est fausse.

On ne demande pas une table de vérité complète.

(3) Quand les invités sont en retard, on décale le service si c'est possible et qu'il n'est pas trop tard.

Correction :

1. Traduction possible : $(R \rightarrow ((P \wedge \neg T) \rightarrow D))$, avec
   - Les invités sont en retard : R
   - On décale le service : D
   - C'est possible de décaler le service : P
   - Il est trop tard : T
2. La situation décrite correspond à : (a) P=1, (b) T=1, et (c) R=0.
   Il reste donc D, pour lequel on énumère les différents cas possibles :

R	P	T	D	$(R \rightarrow ((P \wedge \neg T) \rightarrow D))$
0	1	1	0	$(0 \rightarrow ((1 \wedge \neg 1) \rightarrow 0)) = (0 \rightarrow (0 \rightarrow 0)) = (0 \rightarrow 1) = 1$
0	1	1	1	$(0 \rightarrow ((1 \wedge \neg 1) \rightarrow 1)) = (0 \rightarrow (0 \rightarrow 1)) = (0 \rightarrow 1) = 1$

3. La table complète est la suivante :

R	P	T	D	$(P \wedge \neg T)$	$((P \wedge \neg T) \rightarrow D))$	$(R \rightarrow ((P \wedge \neg T) \rightarrow D))$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

   La seule situation qui rend la formule fausse est celle dans laquelle les invités sont en retard, il est possible de décaler le service, il n'est pas trop tard, et *(pourtant)* on ne décale pas le service.

Exercice 3

Montrer que, quelles que soient φ et ψ, les paires de formules suivantes sont équivalentes (on a omis les parenthèses extérieures).

(i)	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
(ii)	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$
(iii)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$

Correction :
Pour démontrer que deux formules sont logiquement équivalentes, il suffit de montrer qu'elles ont la même colonne dans la table de vérité composite. Bien entendu, il faut que les colonnes **entières** soient identiques (ce qui signifie alors que les expressions ont les mêmes valeurs dans toutes les situations).

Dans la table de vérité ci-dessous, on peut voir que les formules (i) $\varphi \to \psi$ et $\neg\psi \to \neg\varphi$, (ii) $\neg(\varphi \wedge \psi)$ et $\neg\varphi \vee \neg\psi$, (iii) $\neg(\varphi \vee \psi)$ et $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ ont les mêmes valeurs de vérité. Ces formules sont donc équivalentes deux à deux.

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\neg\psi \to \neg\varphi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$
0	0	1	1	$\neg 0 = 1$	1	1	1
0	1	1	1	$\neg 0 = 1$	1	0	0
1	0	0	0	$\neg 0 = 1$	1	0	0
1	1	1	1	$\neg 1 = 0$	0	0	0

Exercice 4

Représenter l'arbre de décomposition de la formule (4).

(4) $\quad ((\neg p \wedge \neg q) \to \neg(q \vee p))$

Correction :