L6FL001 Sémantique formelle – 21/22	
Corrigé	
DST n°1 – Groupe 1	8 Mars 2022

Exercice 1

Traduire les phrases suivantes en logique des propositions, en indiquant à quelle proposition correspond chaque symbole de proposition.

(1) a. Soit Jean a réussi l'épreuve, et il est en vacances, soit il a échoué.
b. Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.
c. Pour arriver place de la Concorde, il suffit de prendre le pont puis de tourner à droite.

Correction :

(2) a. Soit Jean a réussi l'épreuve, et il est en vacances, soit il a échoué.

Jean a réussi l'épreuve	R
Jean a échoué à l'épreuve	E
Jean est en vacances	V

$((R \wedge V) \vee E)$

b. Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.

Ce moteur est bruyant	P
Ce moteur consomme beaucoup	Q

$(\neg P \wedge Q)$

c. Pour arriver place de la Concorde, il suffit de prendre le pont puis de tourner à droite.

On arrive place de la Concorde	A
On prend le pont	P
On tourne à droite	D

$((P \wedge D) \rightarrow A)$

On perd l'information qu'il faut prendre le pont et seulement ensuite tourner à droite.

Exercice 2

1. Traduire la phrase suivante en logique des propositions.
2. Donner ses conditions de vérité quand on est dans le cas où : (a) la porte est fermée, (b) c'est trop tard, et (c) Paul n'est pas en avance.
3. Décrivez une situation dans laquelle cette phrase est fausse.

On ne demande pas une table de vérité complète.

(3) Quand Paul arrive en avance et que la porte est fermée, il frappe chez Jean si ce n'est pas trop tard.

Correction :

1. Traduction possible : $((P \wedge F) \to (\neg T \to P_j))$, avec
   - Paul arrive en avance : P
   - La porte est fermée : F
   - Paul frappe chez Jean : P_j
   - C'est trop tard : T
2. La situation décrite correspond à : (a) F=1, (b) T=1, et (c) P=0.
   Il reste donc P_j, pour lequel on énumère les différents cas possibles :

P	F	T	P_j	$((P \wedge F) \to (\neg T \to P_j))$
0	1	1	0	$((0 \wedge 1) \to (\neg 1 \to 0)) = (0 \to (0 \to 0)) = (0 \to (1)) = 1$
0	1	1	1	$((0 \wedge 1) \to (\neg 1 \to 1)) = (0 \to (0 \to 1)) = (0 \to (1)) = 1$

3. La table complète est la suivante :

P	F	T	P_j	$(P \wedge F)$	$(\neg T \to P_j)$	$((P \wedge F) \to (\neg T \to P_j))$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

   La seule situation qui rend la formule fausse est celle dans laquelle Paul arrive en avance, la porte est fermée, il n'est pas trop tard et *(pourtant)* Paul ne frappe pas chez Jean.

Exercice 3

Montrer que, quelles que soient φ et ψ, les paires de formules suivantes sont équivalentes (on a omis les parenthèses extérieures).

(i) $\varphi \to \psi$ $\quad \neg\varphi \vee \psi$
(ii) $\varphi \leftrightarrow \psi$ $\quad (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
(iii) $\varphi \wedge \psi$ $\quad \psi \wedge \varphi$

Correction :
Pour démontrer que deux formules sont logiquement équivalentes, il suffit de montrer qu'elles ont la même colonne dans la table de vérité composite. Bien entendu, il faut que les colonnes **entières** soient identiques (ce qui signifie alors que les expressions ont les mêmes valeurs dans toutes les situations).

Dans la table de vérité ci-dessous, on peut voir que les formules (i) $\varphi \to \psi$ et $\neg\varphi \vee \psi$, (ii) $\varphi \leftrightarrow \psi$ et $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, (iii) $\varphi \wedge \psi$ et $\psi \wedge \varphi$ ont les mêmes valeurs de vérité. Ces formules sont donc équivalentes deux à deux.

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	$\varphi \wedge \psi$	$\psi \wedge \varphi$
0	0	1	1	1	$(1 \wedge (0 \to 0)) = (1 \wedge 1) = 1$	0	0
0	1	1	1	0	$(1 \wedge (1 \to 0)) = (1 \wedge 0) = 0$	0	0
1	0	0	0	0	$(0 \wedge (0 \to 1)) = (0 \wedge 1) = 0$	0	0
1	1	1	1	1	$(1 \wedge (1 \to 0)) = (1 \wedge 1) = 1$	1	1

Exercice 4

Représenter l'arbre de décomposition de la formule (4).

(4) $\quad ((p \to q) \wedge \neg(\neg q \wedge (p \vee r)))$

Correction :